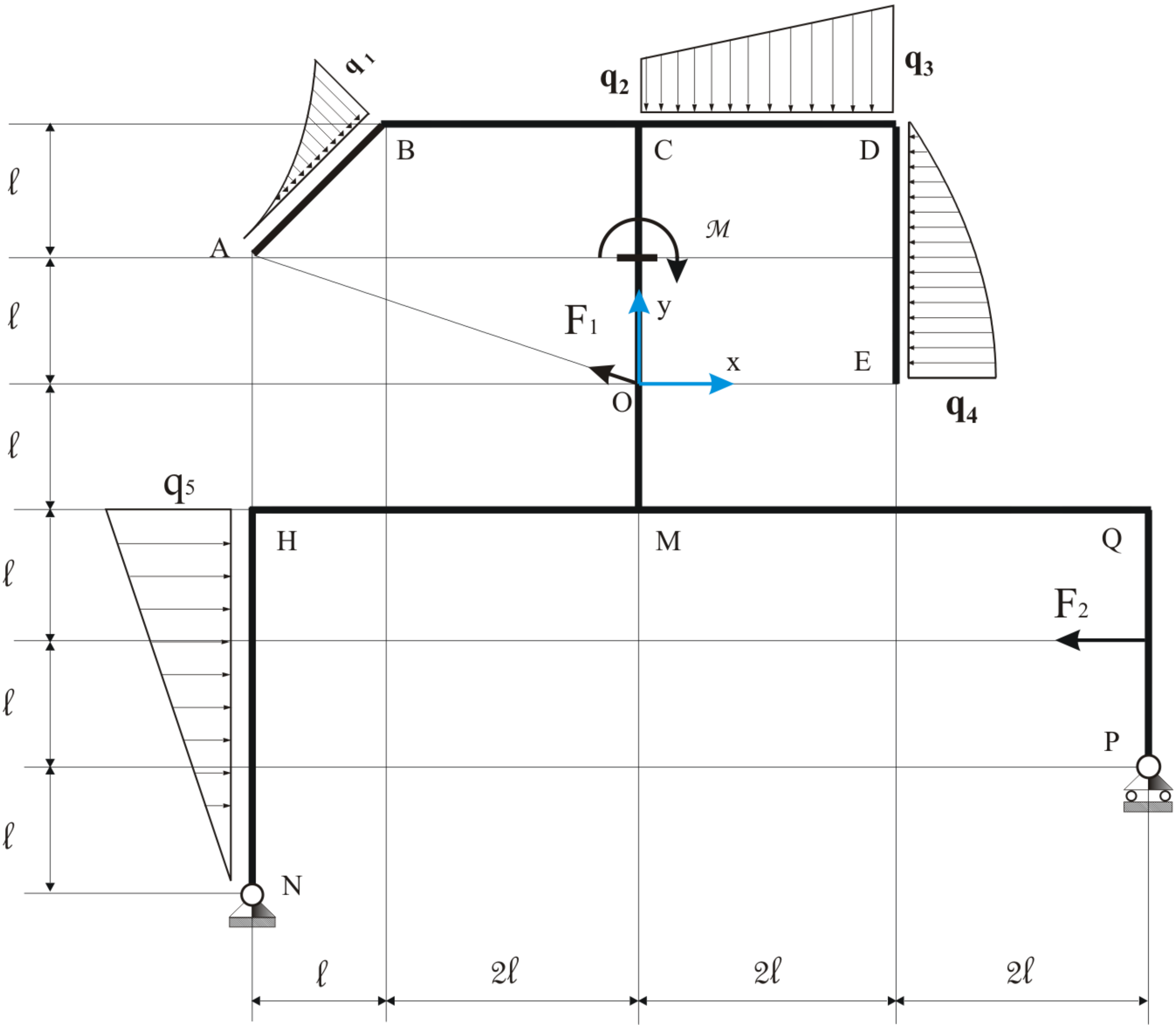
Allievo: **Danilo**
Matricola: -

ELABORATO 1 – TEORIA DEI VETTORI



DATI

q_1 = 5 *kN/m*	q_2 = 7 *kN/m*	q_3 = 21 *kN/m*
q_4 = 14 *kN/m*	q_5 = 5 *kN/m*	L = 1 *m*
F_1 = 10 *kN*	F_2 = 15 *kN*	M = -35 *kNm*

Analisi della parte superiore della struttura
Si assegna un sistema di riferimento con origine nel punto di applicazione del vettore **F1**.
Si sostituiscono i carichi distribuiti (campi vettoriali) con le risultanti nei rispettivi **assi centrali**.

Definizione di **asse centrale**
$\mathcal{A}$: luogo dei punti Ω tali che
$\mathbf{M}_\Omega = \lambda \mathbf{R}$; $\lambda \in \mathcal{R}$

Allievo: **Danilo**
Matricola: -

I moduli dei vettori **R** ed **M**

$$R = \int_0^l q(x)dx$$

$$M_{oz} = \int_0^l q(x)xdx$$

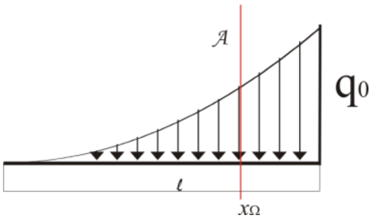
$$M_\Omega = \int_0^l q(x) \cdot (x - x_\Omega)dx = 0$$

segue che

$$M_\Omega = \int_0^l q(x)xdx - \int_0^l q(x)x_\Omega dx = \int_0^l q(x)xdx - x_\Omega \cdot \int_0^l q(x)dx =$$

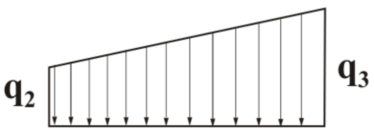
$$= M_{oz} - x_\Omega R = 0 \Rightarrow x_\Omega = \frac{M_{oz}}{R}$$

dove con X_Ω si indica la posizione dell'asse centrale sul carico distribuito. Allora

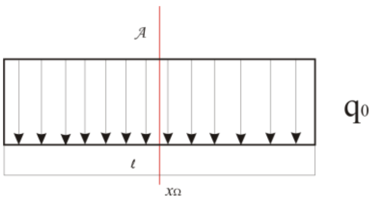


$$R = \frac{1}{3}q_0 l$$

$$x_\Omega = \frac{3}{4}l$$



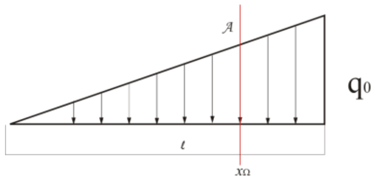
il carico trapezoidale può essere diviso in un carico costante ed un carico triangolare



$$R = q_0 l$$

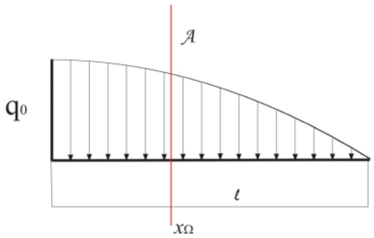
$$x_\Omega = \frac{l}{2}$$

Allievo: **Danilo**
Matricola: -



$$R = \frac{q_0 l}{2}$$

$$x_\Omega = \frac{2}{3} l$$



$$R = \frac{2}{3} q_0 l$$

$$x_\Omega = \frac{3}{8} l$$

Tale operazione è possibile perché **i due sistemi sono equivalenti** (stessa risultante e stesso momento rispetto allo stesso polo)
Ora si riportano le grandezze trovate per ciascun carico nella seguente tabella, ricordando che:
R_{ix} è la **componente** del risultante **R** sull'asse x
R_{iy} è la **componente** del risultante **R** sull'asse y

Definizione di componente:
la componente di un vettore **u** su una retta orientata r***e*** (***e*** versore della retta) è il **prodotto scalare**

$$u_r = \underline{u} \cdot \underline{r} = |\underline{u}| \cdot |\underline{r}| \cdot \cos\theta$$

dove con θ si indica l'angolo minore di π compreso tra le frecce dei vettori.

Carico	R_{ix}	R_{iy}	M_{ioz}
1	16,66667	-16,6667	8,333333
2	0	-14	-14
3	0	-14	-18,6667
4	-18,6667	0	14
F1	-9,48683	3,162278	0
M	0	0	-35
Σsup	-11,4868	-41,5044	-45,333

dove con 1-2-3-4 si sono indicati rispettivamente i carichi parabolico (minore), costante, triangolare (superiore), parabolico (maggiore).

Si scrive ora l'equazione dell'asse centrale

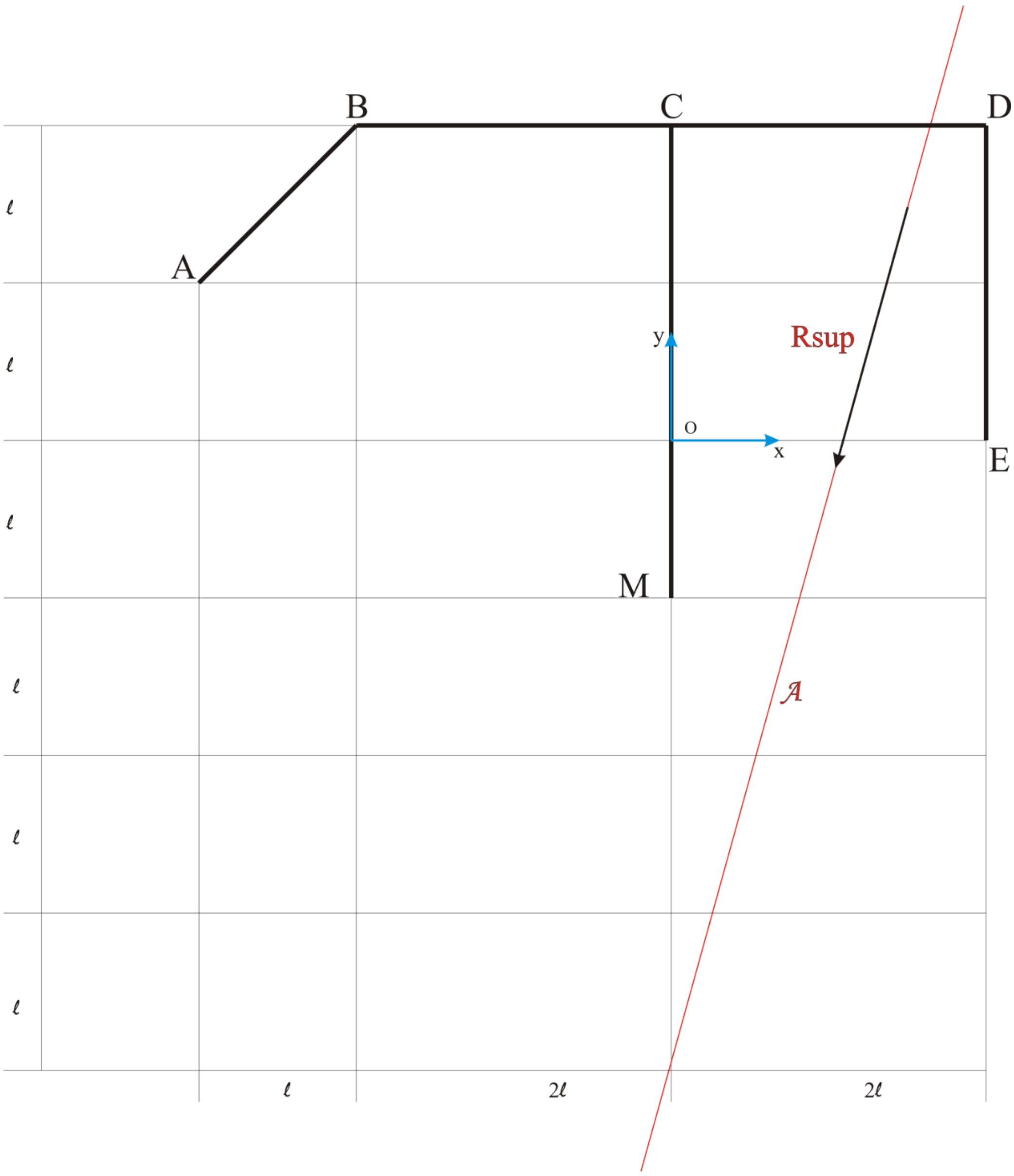
$$\Omega - O = \frac{\underline{R} \times \underline{M}_o}{R^2} + t\underline{R}$$

dove il numeratore del primo termine del secondo membro è un **prodotto vettoriale**
Definizione di **prodotto vettoriale**: è un vettore
di modulo $|\underline{u} \times \underline{v}| = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \sin\theta$ θ angolo compreso tra i vettori
direzione ortogonale al piano dei vettori **u**, **v**
verso tale che la terna **u**, **v**, **u** x **v** sia levogira

$$\mathcal{A}: \begin{cases} X_\Omega = \dfrac{[\underline{R} \times \underline{M}_o]_x}{R^2} + tR_x \\ Y_\Omega = \dfrac{[\underline{R} \times \underline{M}_o]_y}{R^2} + tR_y \end{cases}$$

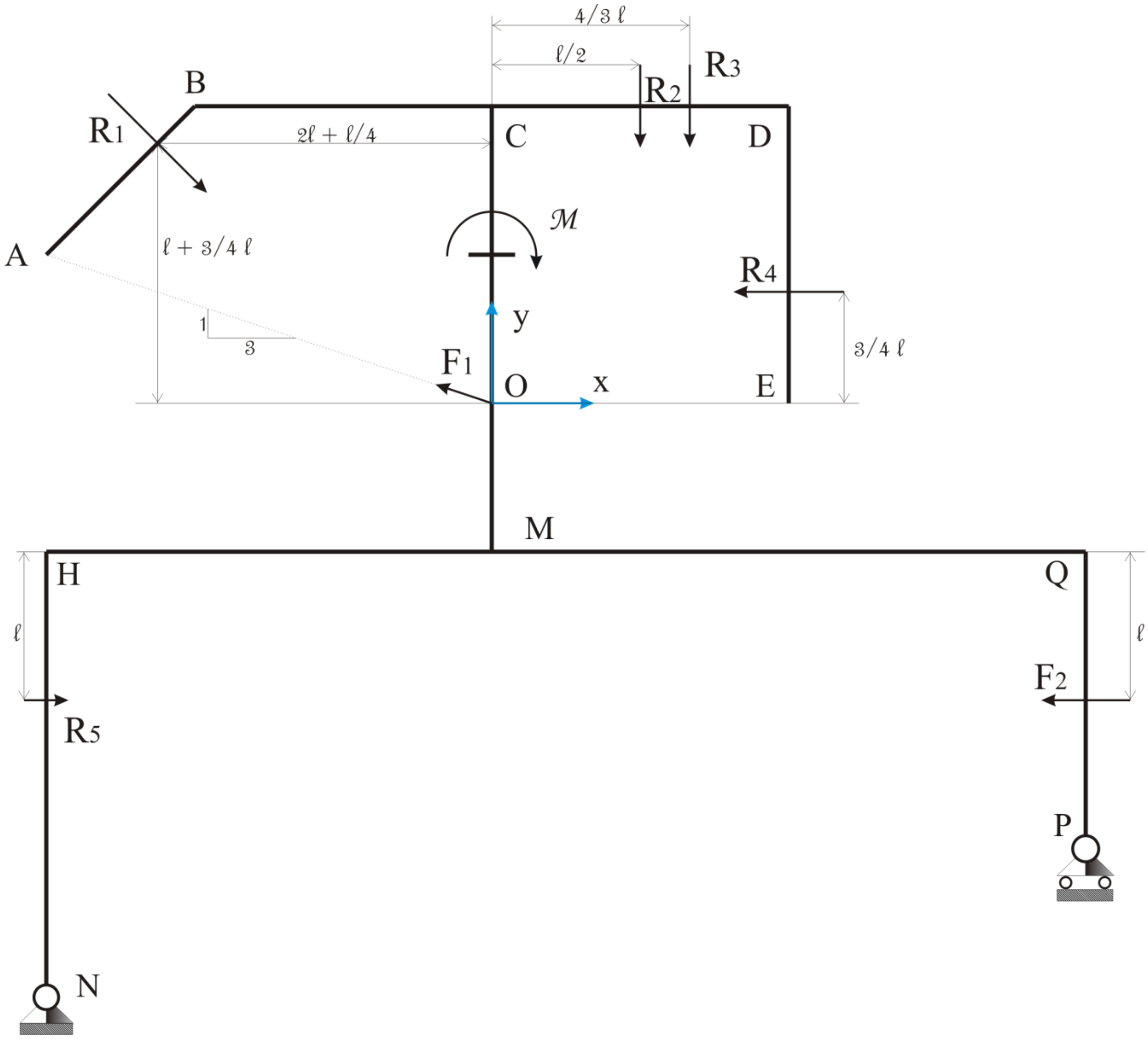
Eseguendo i calcoli (vedi allegato in MATLAB) si perviene all'equazione dell'asse centrale in forma esplicita:

$$Y_\Omega = 3.613 X_\Omega - 3.946$$



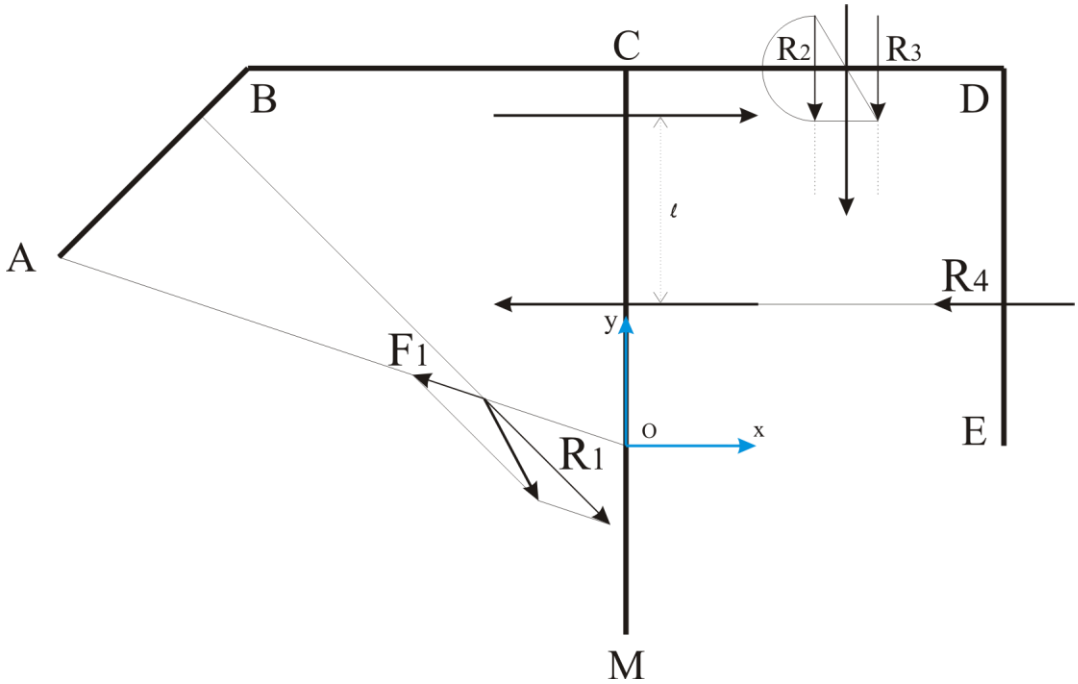
Allievo: **Danilo**
Matricola: -

Si compara questo metodo analitico con un metodo grafico (ℓ = 25*mm*)

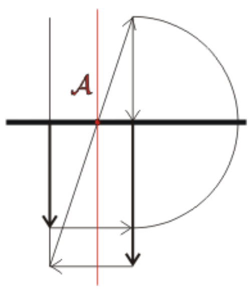


Le forze si compongono con la regola del parallelogramma (si veda a proposito la composizione dei vettori $\mathbf{R_1}$ e $\mathbf{F_1}$ nel disegno seguente).
La coppia $\mathcal{M}$ si scompone in due forze uguali ed opposte, separate da un braccio.
Essendo $\mathcal{M}$ = -35 *kNm* si è scelto il braccio pari ad ℓ = 1 *m* e le forze 35 *kN*

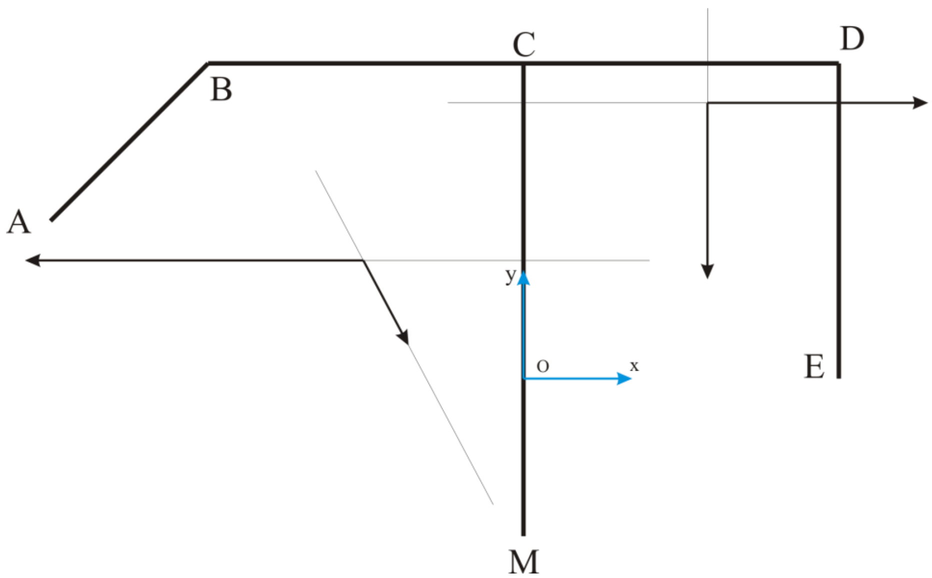
Allievo: **Danilo**
Matricola: -



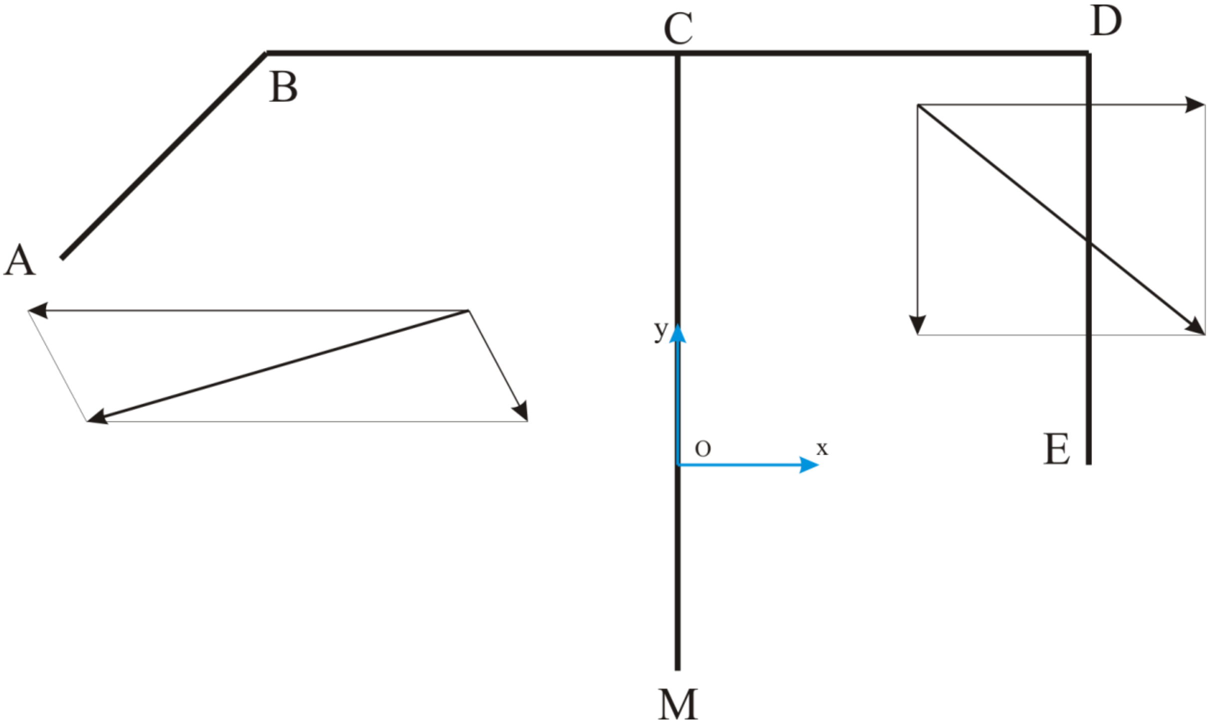
per quanto riguarda i vettori paralleli $\mathbf{R_2}$ e $\mathbf{R_3}$ si è proceduto come nel modo seguente

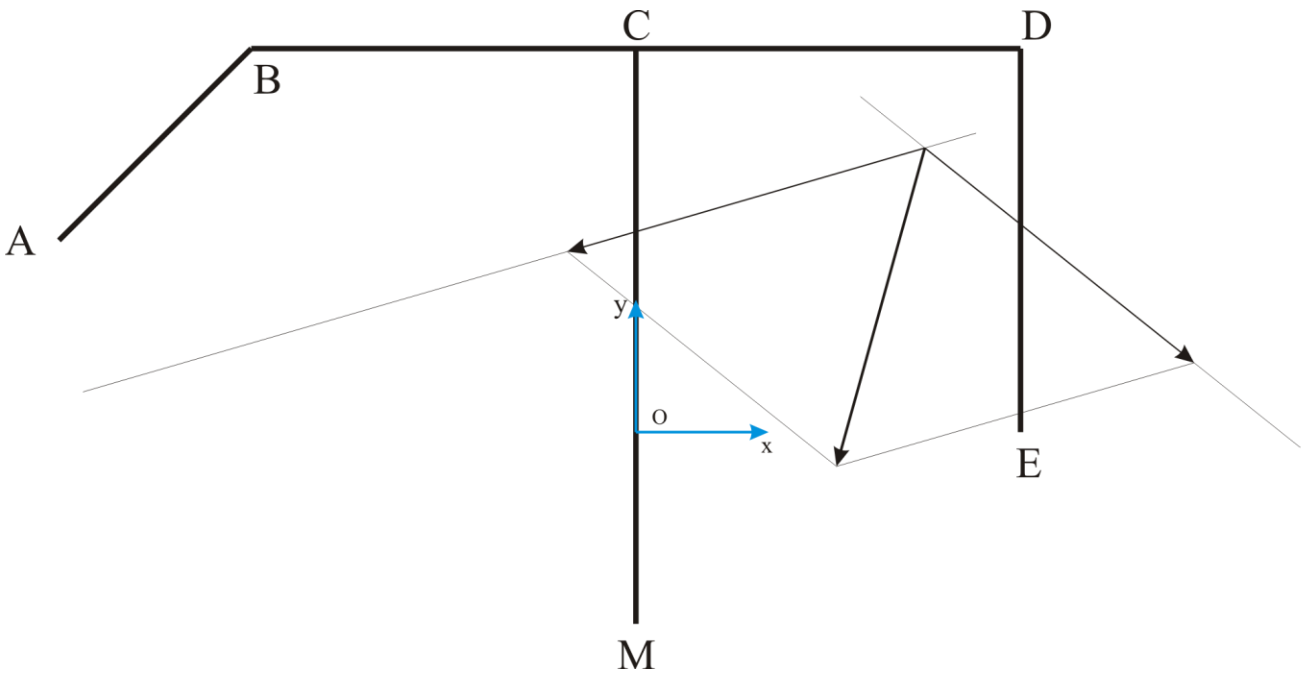


poiché i due vettori in questione, oltre che paralleli e concordi, sono uguali, l'asse centrale si trova a metà della distanza che li separa.

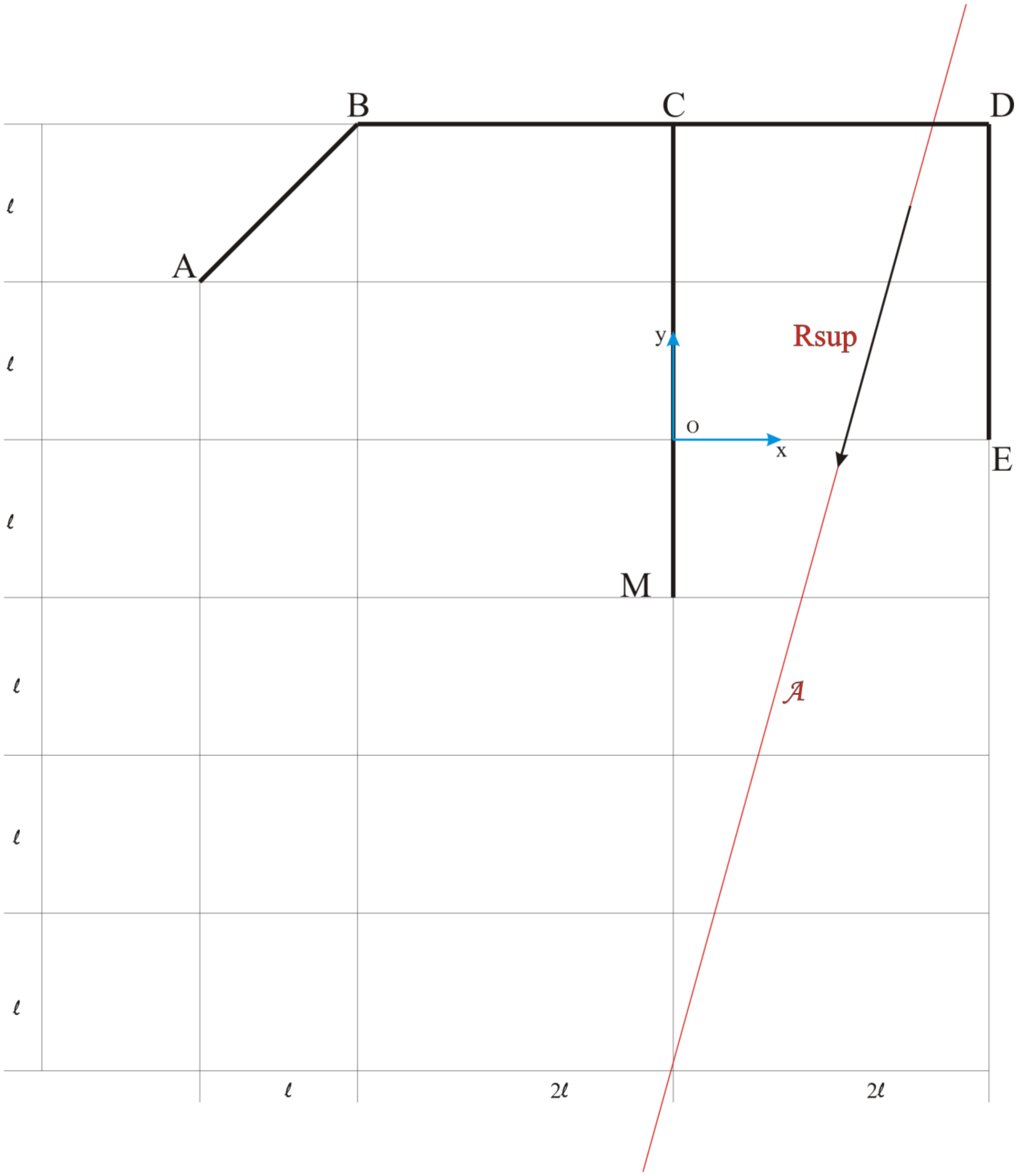


Allievo: **Danilo**
Matricola: -

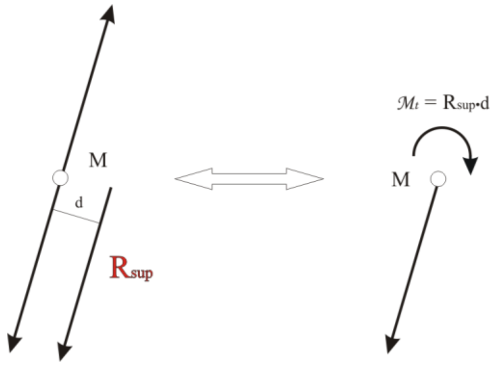




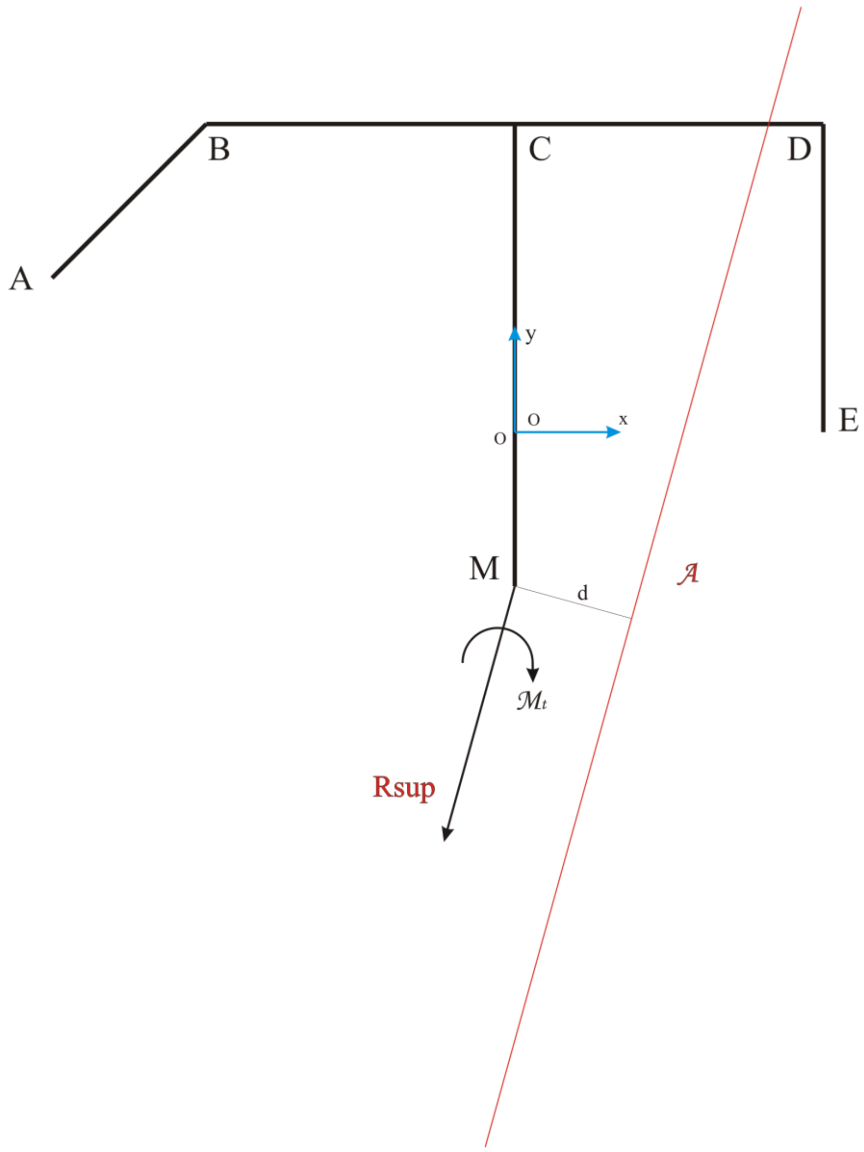
Allievo: **Danilo**
Matricola: -



Adesso riconsideriamo l'intera struttura e spostiamo la risultante $\mathbf{R}_{\mathbf{sup}}$ nel punto M, aggiungendo una coppia di trasporto



Allievo: **Danilo**
Matricola: -



dove la distanza *d* è stata calcolata con la formula della distanza retta-punto

$$d = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0.786\ell$$

dove x_M e y_M sono le coordinate del punto *M*, *a* ed *b* sono rispettivamente il coefficiente angolare ed il termine noto dell'equazione dell'asse centrale:

$$Y_\Omega = 3.613 X_\Omega - 3.946$$

per cui
$a = 3.613$
$b = -3.946$

la coppia di trasporto $\mathcal{M}_t$

$$\mathcal{M}_t = R_{\sup} \cdot d = 33.849 kN \cdot m$$

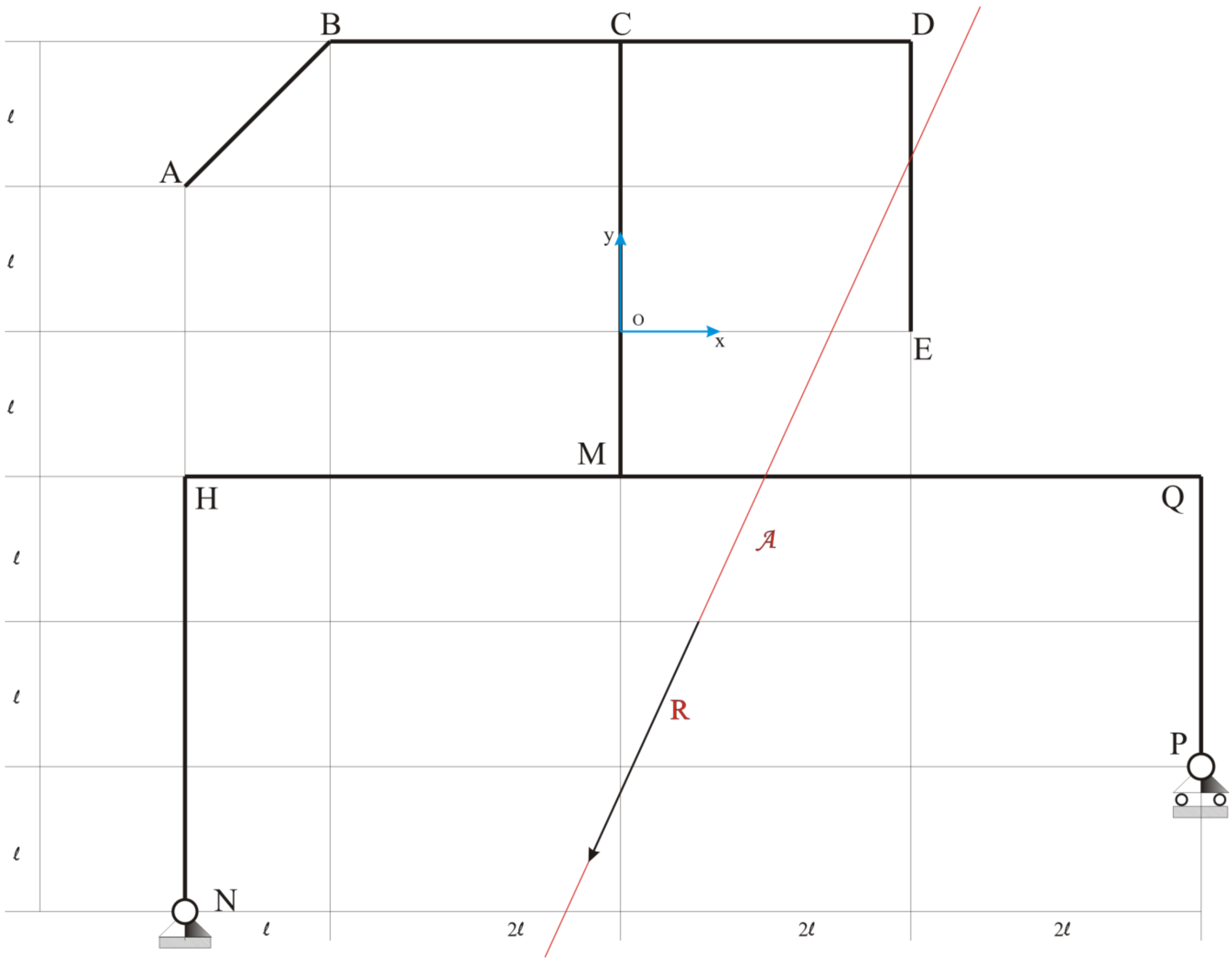
Allievo: **Danilo**
Matricola: -

Si ripetono le stesse operazioni per la parte inferiore della struttura

Σsup	-11,4868	-41,5044	-45,333
5	7,5	0	15
F2	-15	0	-30
Σ	-18,9868	-41,5044	-60,333

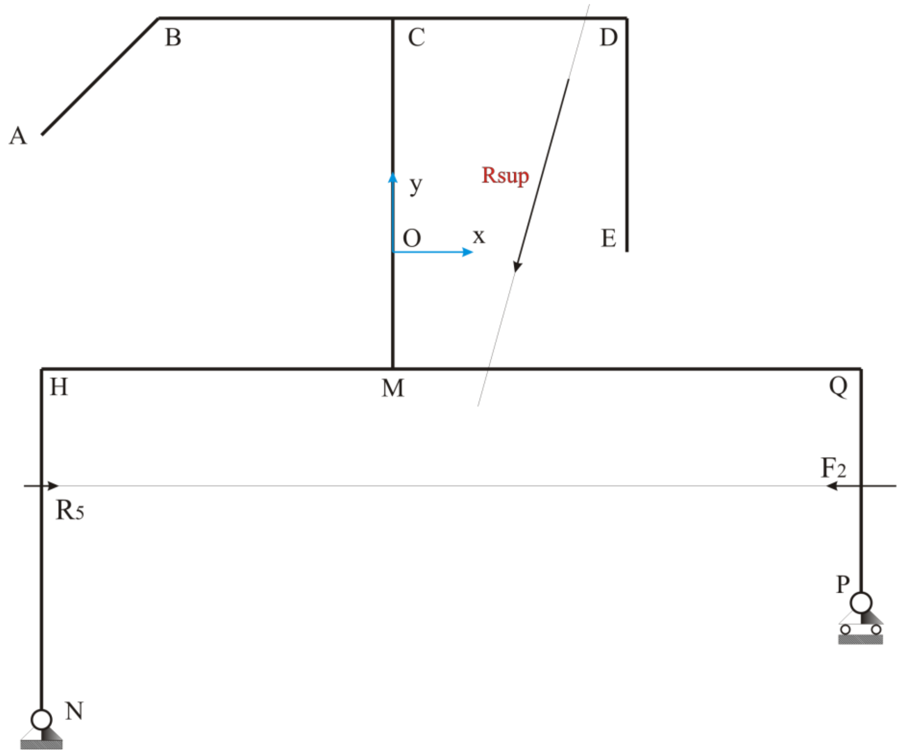
Il nuovo asse centrale avrà equazione (si veda ancora l'allegato in MATLAB)

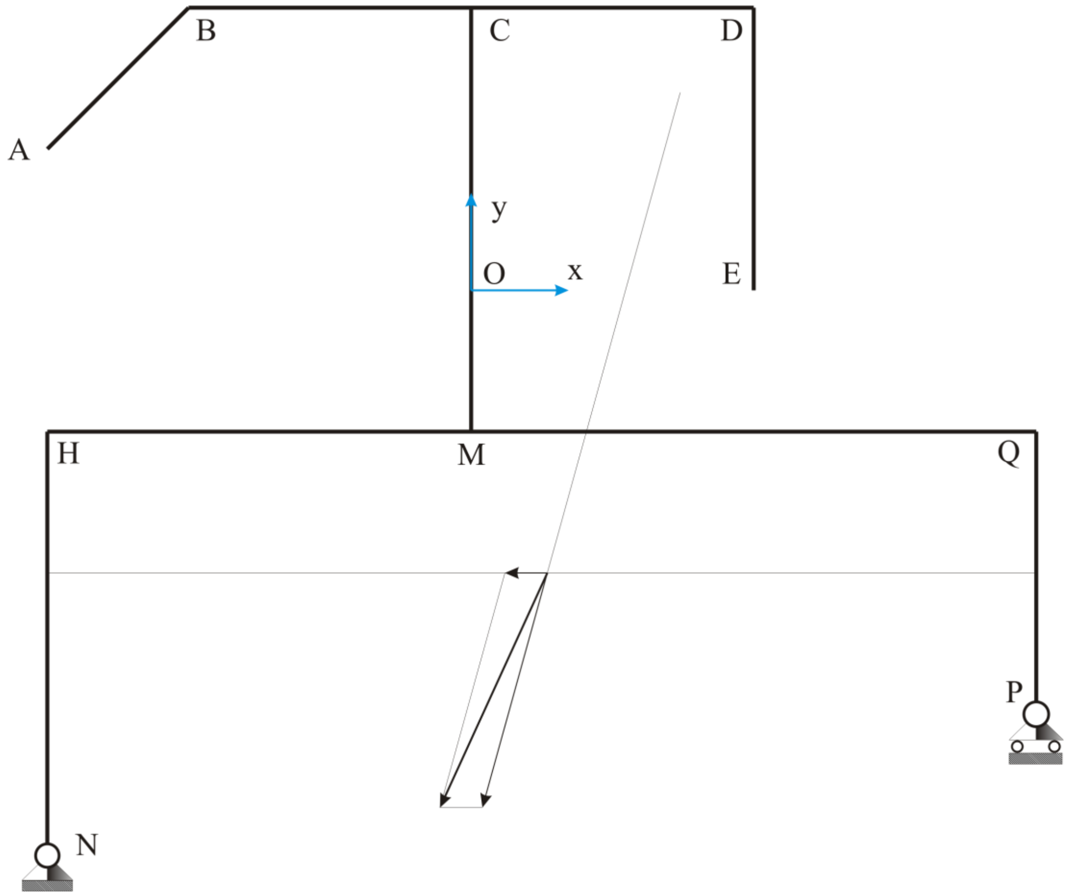
$$Y_\Omega = 2.186 X_\Omega - 3.178$$



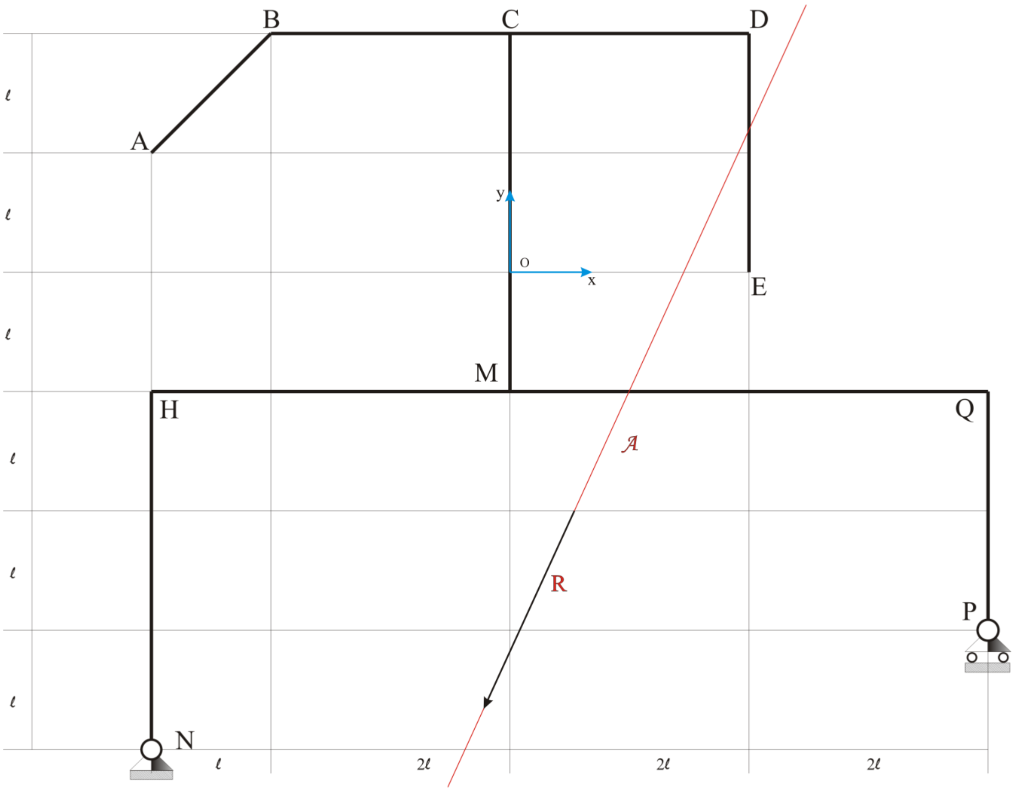
Costruzione grafica: si parte dal risultante della parte superiore della struttura $\mathbf{R}_{sup}$ e lo si compone con il risultante delle forze $\mathbf{F}_2$ ed $\mathbf{R}_5$.
Si ottiene così il nuovo risultante $\mathbf{R}_{tot}$ ed il nuovo asse centrale

Allievo: **Danilo**
Matricola: -

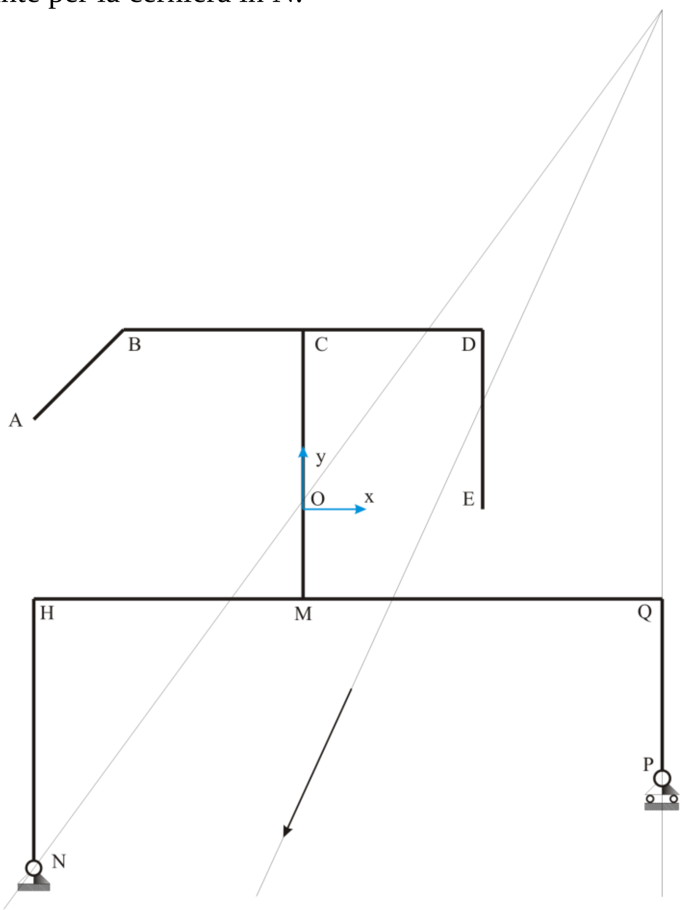




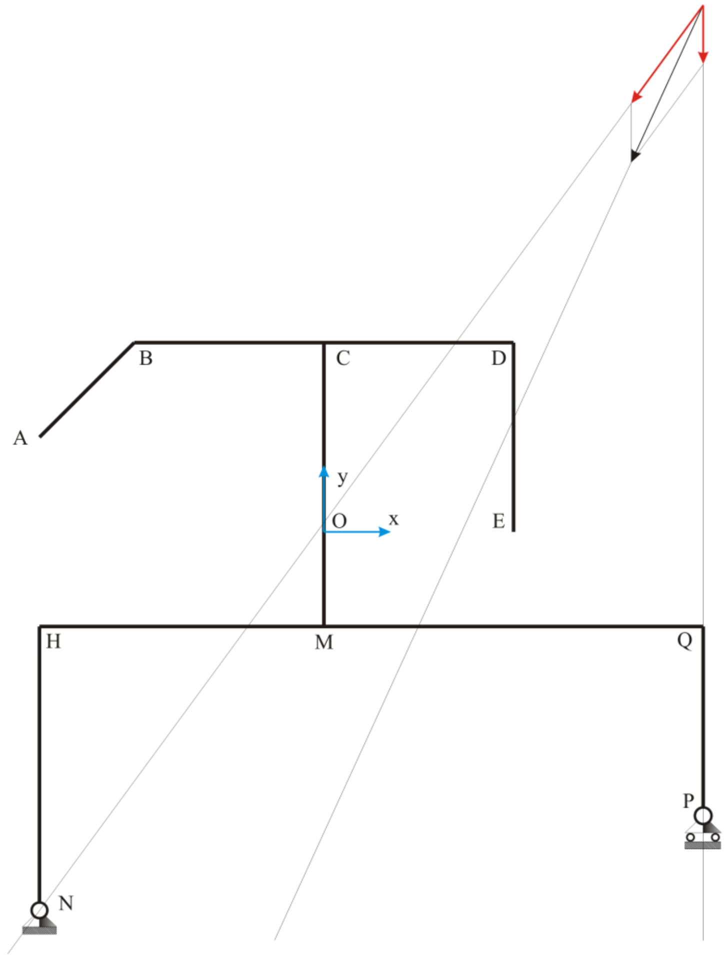
Allievo: **Danilo**
Matricola: -



Si scompone infine il risultante **R** in due vettori componenti: $\mathbf{R_P}$ verticale, applicato sul vincolo carrello in P e $\mathbf{R_N}$ passante per la cerniera in N.



Allievo: **Danilo**
Matricola: -



ed ecco come appare la struttura finale